

Astronomie: Auflösungsvermögen und Sampling

Description

Gehört zu: [Teleskope](#)

Siehe auch: [Nachführung](#), [Aufnahmeverfahren](#), [Orion ED80/600](#), [Barlow-Linse](#), [ZWO ASI 294MC](#)

Benutzt: [Fotos von Google Drive](#), Tabellenblatt von Google Drive

Stand: 14.10.2023

Auflösungsvermögen eines Teleskops

Das sog. Auflösungsvermögen eines Teleskops bedeutet, welche kleinen Einzelheiten noch getrennt dargestellt werden können (deswegen auch "Trennschärfe" genannt). Das hängt von der Öffnung des Teleskops ab.

Siehe: <http://www.clearskyblog.de/2009/09/22/mathematik-in-der-astronomie-teil-4-das-aufloesungsvermoegen-von-teleskopen/>

Beugungsscheibchen (Airy-Scheibe)

Das Abbild einer punktförmigen Lichtquelle (ein Stern) ist im Teleskop ein Beugungsmuster mit einem Beugungsscheibchen in der Mitte das Maximum.

Der **Radius** des Beugungsscheibchens, gemessen bis zum ersten Minimum, ist (in Bogensekunden) ist nach **George Airy**:

$$(1) \hat{r} = 1,22 * (\lambda / D) * 206265 \text{ [arcsec]}$$

wobei

- $206265 = 360 * 60 * 60 / 2\pi$
- λ die Wellenlänge des Lichts [nm],
- D die Öffnung des Teleskops [mm] ist

Die 1,22 ergibt sich aber als die erste Nullstelle der **Besselfunktion (s.u.)**, die für den Radius des ersten Beugungsminimums zuständig ist.

Zur sich daraus ergebenden Berechnung des Auflösungsvermögens (s.u.) lassen Teleskop-Verkäufer gern den Faktor 1,22 weg, um zu besser aussehenden Werten zu kommen.

Abbildung 1: Ein Beugungsscheibchen (Google Archiv: [Diffraction_disc_calculated.jpg](#))

Beugungsscheibchen (Wikimedia KaiMartin CC BY-SA 3.0)

Auflösungsvermögen: Rayleigh-Kriterium

Die Frage ist nun, wie dicht dürfen zwei solche Beugungsscheibchen zueinander stehen, sodass wir sie immer noch als zwei getrennte Objekte erkennen können?

Das sog. **Rayleigh-Kriterium** besagt, dass der minimale Abstand zweier Lichtpunkte, der noch eine Trennung ermöglicht, dann erreicht ist, wenn der Mittelpunkt des zweiten Lichtpunkts genau im ersten Minimum des Beugungsmusters des ersten Lichtpunkts liegt.

Dieses Rayleikriterium ist physikalisch nicht wirklich begründet. Wenn ich die Lichtpunkte ein klein wenig näher aneinander rücke, wird die Trennbarkeit ja nicht plötzlich aufhören. Aber so Pi mal Daumen passt es schon.

Abbildung 2: Zwei Beugungsscheibchen (Google Drive: Airydisks_rayleigh_sqrt.jpg)

Rayleigh Kriterium ??? Copyright WikiMedia Geek3 CC BY-SA 3.0

Wenn wir als Lichtwellenlänge λ annehmen 550 nm (grün), ergibt sich als Faktor

$$1,22 * 550 \text{ nm} * 206265 = 138403815 \text{ nm}$$

und damit folgende (theoretische) Faustformel für den Radius des Beugungsscheibchens und damit (nach Rayleigh) für das Auflösungsvermögen:

$$(2) \text{ Auflösungsvermögen } [\text{''}] = 138 / D [\text{mm}]$$

Gerechnet mit dieser Faustformel ergibt sich:

Tabelle 1: Auflösungsvermögen

Teleskop	Öffnung in mm	Auflösungsvermögen in ''
GuideScope50	50	2,76'' ³
LidlScope	70	1,98'' ³
Orion ED 80/600	80	1,73'' ³
APM APO 107	107	1,29'' ³
Vixen 114/900	114	1,21'' ³

Abtast-Theorem von Nyquist und Shannon

Nun fällt dieses analoge Bild (s.o.) ja auf den Sensor unserer Kamera. Der Sensor besteht aus (diskreten) Pixeln. Der Sensor ist also digital.

Wir haben es also mit der Wandlung eines **analogen Signals** in ein **digitales Signal** zu tun.

Die digitale Pixel-Matrix tastet sozusagen das analoge Bild ab.

Hier wird immer gern das Abtast-Theorem (= Sampling Theorem) von Nyquist und Shannon herangezogen. Das sagt, im Prinzip sollte die Abtastfrequenz mindestens 2-mal so groß sein, wie das kleinste Detail im analogen Signal, sprich also wie die Auflösung.

Siehe dazu etwa: http://www.nightskyimages.co.uk/sampling_rate.htm

Das ist intuitiv ja auch klar, wie folgendes Bild veranschaulicht:

Abbildung 3: Nyquist Sampling Theorem (Google Drive: Nyquist-01.jpg)

Nyquist Abtasttheorem

[Nyquist](#)

Pixelgröße und Brennweite

Oft wird die Frage gestellt, welche **Pixelgröße** die Aufnahmekamera (der **Sensor**) bei gegebener Teleskopbrennweite haben sollte. Hierzu folgende Betrachtung: Zwei Objekte lassen sich auf dem Sensor nur dann trennen, wenn zwischen ihnen ein weiterer Pixel liegt. Der Abstand dieser Objekte auf dem Sensor-Chip beträgt also das Zweifache der Pixelgröße ($2 \times p$).

Bei der **Astrofotografie** muss man die absolute Größe des Beugungsscheibchen (von der Optik) in Relation zur **Pixelgröße** des Sensors setzen. Die absolute Größe des Beugungsscheibchens hängt dabei von der **Brennweite (f)** und der **Öffnung (D)** des Teleskops ab, bzw. bei längerer Belichtung vom **Seeing**. Das Sternenscheibchen durch Seeing kann je nach Luftunruhe 2³ bis 5³ (**FWHM**) betragen (Link: <https://sternen-surfer.jimdo.com/tipps/pixelgr%C3%B6%C3%9Fe-und-brennweite/>).

Um die Durchmesser des Beugungsscheibchens mit der **Pixelgröße** der Kamera vergleichen zu können, rechnen wir den Winkel (Formel (1) oben) in Länge um,

Radius Beugungsscheibchen [μm] = Brennweite [mm] * 1000 * Auflösungsvermögen [arcsec] * π / (60*60*180)

Radius Beugungsscheibchen [μm] = Brennweite [mm] * 1000 * **1,22 * (λ) [nm] / D [mm]**

Mit der Wellenlänge $\lambda = 550$ nm bekommen wir dann:

$$(3) \text{ Radius Beugungsscheibchen } [\mu\text{m}] = (f/D) * 0,671$$

Also spielt das Öffnungsverhältnis **f/D** die entscheidende Rolle:

Tabelle 2: Optimale Pixelgröße

Teleskop	Öffnung in mm	Auflösungsvermögen in λ	Brennweite in mm	Radius Beugungsscheibchen in λ	Optimale Pixelgröße in λ
GuideScope50	50	2,76 λ	180	2,42 λ	1,2 λ
LidScope	70	1,98 λ	700	6,71 λ	3,3 λ
Orion ED 80/600	80	1,73 λ	600	5,03 λ	2,6 λ
Orion ED 80/510 mit Reducer	80	1,73 λ ³	510	4,28 λ	2,1 λ
Orion ED 80/1200 mit Barlowlinse	80	1,73 λ ³	1200	10,07 λ	5,0 λ
APM APO 107/700 mit Reducer	107	1,29 λ ³	525	3,29 λ	1,6 λ
Vixen 114/900	114	1,21 λ	900	5,30 λ	2,6 λ
Seeing FWHM		2,00 λ ³	510	4,95 λ	2,5 λ

Oversampling und Undersampling

Die Pixelgröße des Sensors ist so etwas wie die Abtastrate (sampling rate). Abgetastet wird dabei das Beugungsscheibchen.

Bei einer zu hohen Abtastrate (kleine Pixel) spricht man von Oversampling; bei zu geringer Abtastrate (große Pixel) von Undersampling.

Abbildung 4: Tabellenblatt zum Sampling (Google Drive: Oversampling.xls)

Für **Deep Sky Astrofotografie** führt ein **leichtes Undersampling** oftmals zu besseren Aufnahmen durch ein besseres Signal-Rausch-Verhältnis und detaillierterer Darstellung als bei Oversampling.

Für **Planetenfotografie** wird man je nach Teleskop versuchen, in klaren Nächten mit gutem Seeing das Auflösungsvermögen des Teleskops zu nutzen um so **eher im Bereich Oversampling** zu besseren Aufnahmen zu gelangen als beim Undersampling.

Wie passt die Digitalkamera mit ihrem Sensor und dessen Pixelgröße nun zu dem Teleskop?

Nach dem [Nyquist-Shannon-Sampling-Theorem](#) brauche ich einen Abstand von 2 Pixeln (also einen leeren Pixel dazwischen) um zwei Punkte zu unterscheiden. Der Abstand zwischen den Abbildungsscheibchen darf der Radius eines Scheibchens sein. Ist die Pixelgröße (viel) kleiner, spricht man von **Oversampling**, ist die Pixelgröße größer, spricht man von **Undersampling**.

Welches Öffnungsverhältnis sollte ich anstreben, wenn Öffnung und Pixelgröße gegeben sind?

Mit dieser Formel kann man auch bei gegebener Pixelgröße und Öffnung die optimale Brennweite d.h. das **Öffnungsverhältnis** berechnen.

$$(4) f/D = \text{Pixelgröße} [\mu\text{m}] / (1000 * 1,22 * \lambda [\text{nm}])$$

(wenn man als Radius des Beugungsscheibchens die Pixelgröße nimmt)

Die Besselfunktion

Die Beugung an einer kreisrunden Öffnung (Lochblende) wird durch die Besselfunktion erster Art (also J_1) von der Ordnung 1 (also J_1) beschrieben.

Die Intensität ist:

$$I(x) = I_0 (2 * J_1(x) / x)^2$$

Die ersten Nullstellen sind:

$$J_1(3,8317)=0 \quad \text{und} \quad J_1(7,0156)=0$$

Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Beugungsscheibchen>

CATEGORY

1. Astrofotografie
2. Astronomie
3. Teleskope

POST TAG

1. Auflösungsvermögen
2. Teleskope

Category

1. Astrofotografie
2. Astronomie
3. Teleskope

Tags

1. Auflösungsvermögen
2. Teleskope