

Astronomie: Die Keplerschen Gesetze

Description

Gehört zu: [Astronomie](#), [Sonnensystem](#)

Siehe auch: [Himmelsmechanik](#), [Entfernungsbestimmung](#), [Newtonsche Mechanik](#), [Lichtgeschwindigkeit](#)

Benutzt WordPress-Plugin [MathJax-Latex](#), [Grafiken aus GitHub](#)

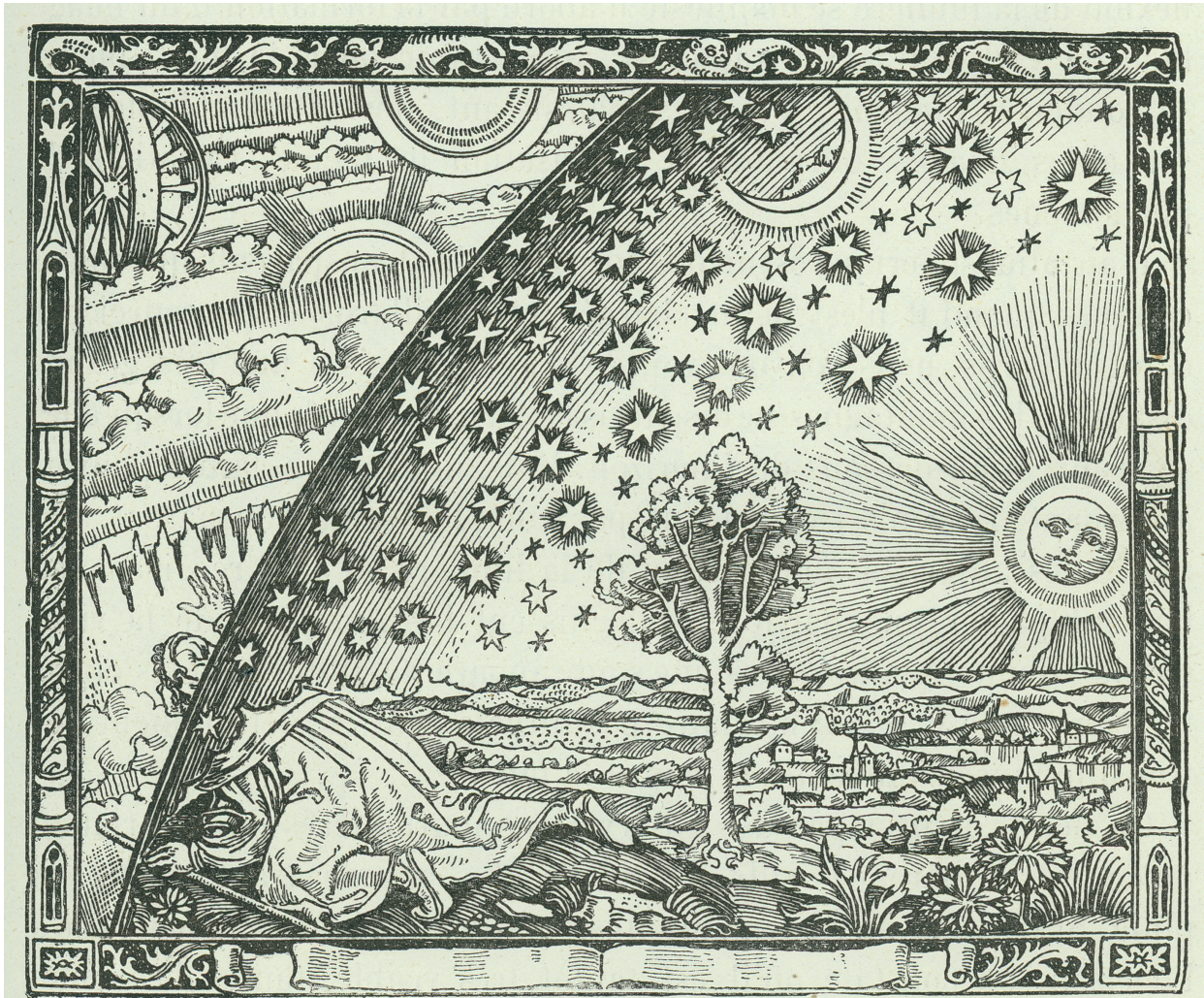
Stand: 06.12.2024

Die Zeit von Johannes Kepler

Johannes Kepler (1571-1630) lebte in bewegten Zeiten:

- 30-jähriger Krieg (1618-1648)
- Kleine Eiszeit (etwa 1570 bis 1630)
- Hexenverbrennungen (1550 und 1650)
- Gallileo Galilei (1564-1642)
- [Nikolaus Kopernikus](#) (1473-1543)
- ?

Abbildung 1: Flammarion Holzschnitt (Wikimedia: FlammarionWoodcut.jpg)



Un missionnaire du moyen âge raconte qu'il avait trouvé le point
où le ciel et la Terre se touchent...

Flammarion Holzschnitt (Wikipedia)

Die Keplerschen Gesetze

Die bahnbrechende Erkenntnis von Kepler war, die Kreisbahnen des heliozentrischen Weltbildes von **Nikolaus Kopernikus** (1473-1543) durch **Ellipsen** zu ersetzen. Johannes Kepler konnte dies durch Analyse der Beobachtungsdaten von **Tycho Brahe** (1546-1601) herleiten; besonders die relativ starke Exzentrizität (0,0934) der Bahn des Planeten Mars brachte Kepler dazu, Ellipsenbahnen anzunehmen. Einen genauen naturwissenschaftlichen Grund dafür konnte Kepler noch nicht angeben.

Kepler ging nicht von gesetzten Voraussetzungen aus (z.B. die Bahnen müssen aus Kreisen bestehen), sondern nur von dem, was beobachtet werden konnte; in diesem Fall von Tycho Brahes genauen Beobachtungsdaten. Kepler konnte daraus die Form der Marsbahn nach jahrelangen Versuchen als Ellipse finden. Voraussetzung dafür war zunächst die genaue Kenntnis der Bahn der

Erde um die Sonne, da Tycho ja die Marspositionen relativ zur Erde gemessen hatte. Keplers mathematisches Handwerkszeug war damals fast ausschließ-lich die Geometrie; deshalb findet man in seiner Veröffentlichung „Astronomia Nova“ von 1609 sehr viele geometrische Zeichnungen mit umfangreichen verbalen Erläuterungen.

Tycho Brahe hatte in einem Zeitraum von 20 Jahren sehr genaue Messungen (besser als 1 Bogenminute) der Positionen der Planeten und von ca. 800 Fixsternen gemacht.

Die Fernsehsendung „Johannes Kepler, der Himmelsstärker“ im Sender **arte** am 08.08.2020 beleuchtete das geniale Werk von Johannes Kepler.

Abbildung 2: Tycho Brahes Mauerquadrant (Wikipedia)



1. Keplersches Gesetz (1609 Astronomia Nova)

Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht

2. Keplersches Gesetz (1609 Astronomia Nova)

Der Fahrstrahl Sonne-Planet $\frac{1}{2}$ berstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

3. Keplersches Gesetz (1618 Harmonici Mundi)

Die Kuben der großen Halbachsen verhalten sich die die Quadrate der Umlaufzeiten.

Das erste Keplersche Gesetz

Eine Ellipse ist ein Kegelschnitt, der im Grenzfall (Exzentrizität = Null) ein Kreis wird.

Nach [Newton](#) haben wir eine Zentralkraft, die proportional zu $\frac{1}{r^2}$ abnimmt.

Mit ein bisschen Mathematik ergeben sich daraus geschlossene Ellipsen als Bahnform.

In cartesischen Koordinaten ist eine Ellipse mit den Halbachsen a und b gegeben durch:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Die Exzentrizität einer Ellipse ist ein Maß für die Abweichung von der Kreisform und wird definiert durch:

$$e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} \quad (\text{Wobei mit } r_{\min} \text{ und } r_{\max} \text{ immer die Entfernungen Sonne-Planet gemeint sind})$$

Zur Zeit beträgt die Exzentrizität der Erdbahn $e = 0,0167$ und schwankt mit dem **Milankowitsch-Zyklus** in $T=100.000$ Jahren minimal. Die Solarkonstante ändert sich mit vergleichsweise geringem Effekt ($\sim 2,4 \text{ W/m}^2$). Quelle: <https://wiki.bildungsserver.de/klimawandel/index.php/Erdbahnparameter>

In Polarkoordinaten kann man die Bahn beschreiben als:

$$r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos\{\phi\}}$$

Das zweite Keplersche Gesetz

Das zweite Keplersche Gesetz folgt allein aus der Tatsache, dass die wirkende Kraft immer genau in Richtung auf die Sonne gerichtet ist (sog. Zentralkraft). Damit muss nämlich der **Drehimpuls** des Systems Sonne-Planet konstant bleiben.

Der Drehimpuls des Systems Sonne-Planet ist bekanntlich:

$$L = m \cdot r \cdot v = m \cdot r^2 \cdot \omega$$

für die überstrichene Fläche $\mathbf{A}(t)$ gilt infinitesimal:

$$dA = \frac{1}{2} \cdot r(t) \cdot v(t) \cdot dt$$

Womit die Bahngeschwindigkeit v eben konstant bleibt:

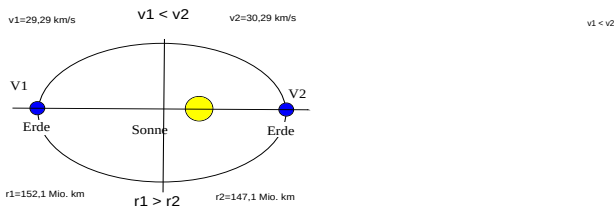
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \cdot r(t) \cdot v(t) = \frac{L}{2m} = \text{const.}$$

Quelle: <https://www.forphys.de/Website/mech/kepler2.html>

Als Beispiel habe ich mal die Bahn der Erde um die Sonne schematisch dargestellt. Das Produkt Bahngeschwindigkeit (v) mal Entfernung Erde-Sonne (r) ist proportional zum Drehmoment.

Abbildung 3: Schematische Darstellung der Bahn der Erde um die Sonne (GitHub: Ellipse.svg)

Dietrich Kracht 20200826 ellipse.svg 2020ellipse.svg



Schematische Darstellung der Bahn der Erde um die Sonne

Das dritte Keplersche Gesetz

Das "Dritte Keplersche Gesetz" bezieht sich nicht auf die Umlaufbahn **eines** Planeten, sondern setzt die Umlaufbahnen **zweier** Planeten zueinander in Beziehung, die sich um den **gleichen Zentralkörper** in Ellipsen bewegen (eventuelle Störungen durch weitere Körper vernachlässigen wir dabei).

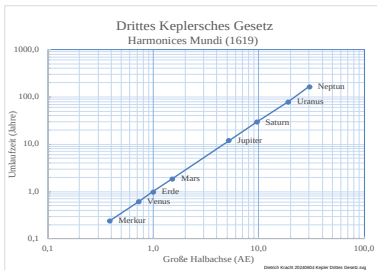
Hier geht Kepler also schon (impliziert) von einem **heliocentrischen Weltbild** aus ([Kopernikus](#)).

Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der mittleren Entfernung. Als Formel also:

$$\left(\frac{a^3_1}{T^2_1} = \frac{a^3_2}{T^2_2} \right)$$

Wenn man die Werte $f_{\frac{1}{4}}$ der Planeten unseres [Sonnensystems](#) in doppelt logarithmischen Koordinaten aufträgt, bekommt man eine gerade Linie.

Abbildung 4: Keplers Drittes Gesetz Unser Sonnensystem (GitHub: 20240604 Kepler Drittes Gesetz.svg)



Wenn wir als Beispiel einmal die Bahnen von Erde und Jupiter vergleichen, so bekommen wir:

Erde: $T_1 = 1$ Jahr, $a_1 = 1$ AE
Jupiter: $T_2 = 11,86$ Jahre, $a_2 = 5,2$ AE

rechnerisch also:

$$\left(\frac{a^3}{T^2} = \frac{5.2^3}{11.86^2} = \frac{140.608}{140.6596} \right)$$

Durch Messung der (siderischen) Umlaufzeit eines Planeten können wir so also die Große Halbachse seiner Bahn bestimmen.

Das Dritte Keplersche Gesetz sagt damit etwas aus über den Zentralkörper: die Sonne. Wenn wir ein wenig **vorgreifen**, ist es die Masse des Zentralkörpers (M), die wir aus der Bahn eines umlaufenden Himmelskörpers bestimmen können; nach der Formel:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\pi^2}$$

Schritt für Schritt kommen wir so zu diesem Ergebnis:

Wenn man die Umlaufszeit eines Planeten um die Sonne mit T bezeichnet und die große Halbachse seiner Bahn um die Sonne mit a , so kann man dieses Gesetz folgendermaßen formulieren:

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{const.}$$

Die [Gravitationskraft](#) (Anziehungskraft) muss immer genau der Zentripetalkraft in der Planetenbahn entsprechen. Also:

$$F = G \frac{m \cdot M}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{a}$$

Die Masse des Planeten m kürzt sich heraus:

$$G \frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{a}$$

Die Bahngeschwindigkeit v erhalten wir als:

$$v = \frac{2\pi a}{T}$$

Wenn wir das oben einsetzen ergibt sich:

$$G \frac{M}{a^2} = \frac{4\pi^2 a}{a \cdot T^2}$$

oder umgestellt:

$$\frac{G \cdot M}{4\pi^2} = \frac{a^3}{T^2} = \text{const.}$$

Quelle: https://www.schule-bw.de/faecher-und-schularten/mathematisch-naturwissenschaftliche-faecher/physik/unterrichtsmaterialien/mechanik_2/kepler/keplergravi.htm

Bestimmung der Jupitermasse

Anhand der Bahndaten des Jupitermondes Kallisto bestimmen wir die Masse des Jupiters mithilfe des Dritten Keplerschen Gesetzes.

Bahndaten Kallisto

- Umlaufzeit 16,689 Tage = 1.441.929,60 s
- Große Halbachse 1882700 km = 1.882.700.000 m (zur Messung benötigt man die Entfernung)

Nach dem 3. Keplerschen Gesetz finden wir:

$$M = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{a^3}{T^2} = \frac{4\pi^2}{6.67} \cdot \frac{1882700000^3}{1441929.6^2} = 1.90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

CATEGORY

1. Astronomie
2. LaTeX Plugin

POST TAG

1. Kepler

Category

1. Astronomie
2. LaTeX Plugin

Tags

1. Kepler