Astronomie: Hydrostatisches Gleichgewicht

Description

GehÃ¶rt zu: Astronomie, Sternenentwicklung
Siehe auch: Hertzsprung-Russel-Diagramm, Roter Riese, Ideales Gas
Benutzt: Latex-Plugin fÃ¼r WordPress, SVG-Grafik aus Github

Stand:13.10.2022

Hydrostatisches Gleichgewicht

Sterne sind ja Gaskugeln, die sich auf der Hauptreihe des HRD im Hydrostatischen Gleichgewicht befinden.
Dazu mÃ¼ssen sich alle wirkenden DrÃ¼cke ausbalacieren.

Zu den in Sterninneren wirkenden DrÃ¼cken gehÃ¶ren: Gravitationsdruck, Gasdruck, Strahlungsdruck, der Druck durch die Fliehkraft,â?¦

Mit diesen verschiedenen DrÃ¼cken, die im Inneren eines Sterns wirken, wollen wir uns nun beschÃ¤ftigen.

Gravitationsdruck

Annahmen: Wir betrachten eine Kugel mit Radius R, einer Gesamtmasse von M und zur weiteren Vereinfachung einer konstanten Dichte \(\rho\).

Wir mÃ¶chten wissen, wie sich im Sterninneren der Druck P(r) in AbhÃ¤ngigkeit von der Entfernung r vom Sternzentrum (r=0) verhÃ¤lt.
Offensichtlich ist an der OberflÃ¤che P(R)=0.

Da die betrachteten physikalischen GrÃ¶Ã?en sich in AbhÃ¤ngigkeit von r Ã¤ndern kÃ¶nnen, berechnen wir alles zuerst fÃ¼r infenitesimal dÃ¼nne Kugelschalen (mit festem r) und mÃ¼ssen dann diese Kugelschalen aufsummieren (integrieren).

Eine Kugelschale

Eine Kugelschale vom Radius **r** (0 <= r <= R), einer FlÃ¤che von FlÃ¤che(r) und der infenitesimalen Dicke von **dr** hat ein **Masse** von:

\(dm = FlÃ¤che(r) \cdot dr \cdot \rho \tag{1}\\ \)
Die nach innen gerichtete Anziehungskraft auf diese Kugelschale ist einfach die Anziehungskraft der Sternmasse im Inneren der Kugelschale (Newtons Schalensatz).

Die Masse innerhalb der Kugelschale vom Radius r ist:

\(m(r) = Volumen(r) \cdot \rho = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \tag{2} \\ \)
Auf diese Kugelschale vom Radius r wirkt also eine Anziehungskraft von:

\(f(r) = â?? G \frac{m(r) dm}{r^2} \tag{3} \\\)
Damit ist der gravitative Druck dieser Kugelschale:

\(dP = \frac{f(r)}{FlÃ¤che(r)} = -\frac{G\frac{m(r) dm}{r^2}}{FlÃ¤che(r)} \tag{4}\\\)
Nun setzten wir den oben gefundenen Ausdruck fÃ¼r **dm** aus Gleichung (1) hier ein:

\(dP = -\frac{G \cdot m(r) \rho \cdot dr}{r^2} \tag{5}\\\)
Dann setzten wir noch die oben gefundene Funktion **m(r)** aus Gleichung (2) hier ein:

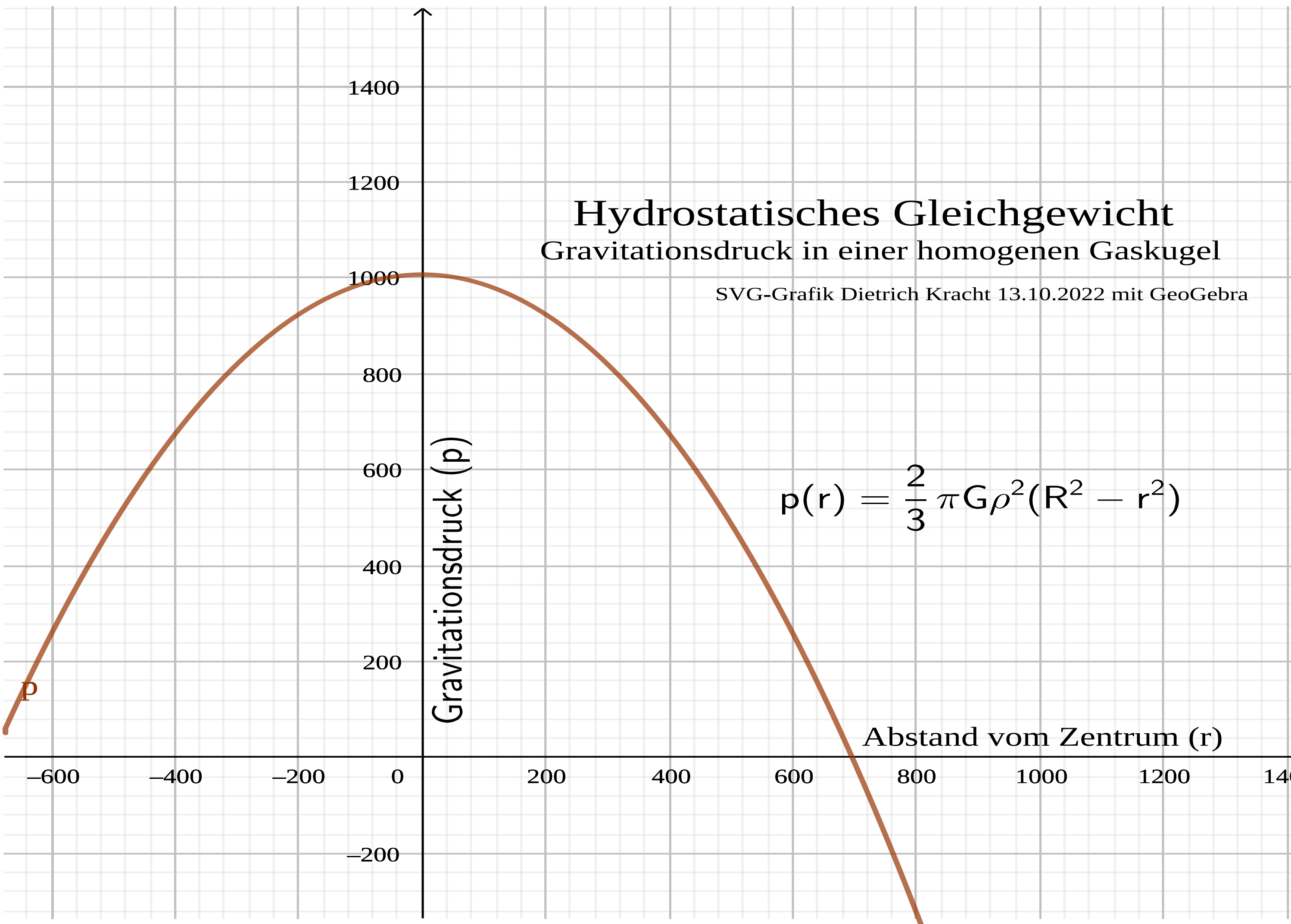
\(dP = -\frac{G \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \cdot \rho \cdot dr}{r^2} \tag{6}\\ \)
und bekommen schieÃ?lich als Gradienten des Gravitationsdrucks:

\(\frac{dP}{dr} = -\frac{4}{3} G \cdot \rho^2 \cdot r \tag{7}\\\)
Dies kÃ¶nnen wir nun aufsummieren (integrieren) zu:

\(P(r) = â?? \frac{2}{3} \pi G \rho^2 \cdot r^2+ const. \tag{8}\\\)
Aus der Randbedingung P(R) = 0 erhalten wir die Integrationskonstante und schlieÃ?lich:

\(P(r) = \frac{2}{3} \pi G \rho^2 R^2 â?? \frac{2}{3} \pi G \rho^2 r^2 = \frac{2}{3} \pi G \rho^2 (r^2 â?? R^2) \tag{9}\\ \)
Diesen Verlauf des Gravitationsdrucks im Inneren eines Sterns kÃ¶nnen wir grafisch mit GeoGebra darstellen, dann als SVG-Datei exportieren und diese dann in unseren WordPress-Betrag einbauen (s.u.).

Abbildung 1: Gravitationsdruck in einer homogenen Gaskugel (Github: Gravitationsdruck.svg)



Der Gasdruck

Zur Vereinfachung nehmen wir zunÃ¤chst an, dass das Gas sich wie ein [ideales Gas] verhÃ¤ltâ?¦.

\(p \cdot V = n \cdot R \cdot T \)

Der Strahlungsdruck

Die Kernfusion im inneren des Sterns erzeugt einen nach aussen gerichteten Energiestromâ?¦.

CATEGORY

1. Astronomie

POST TAG

1. Sternenentwicklung
2. Sternentwicklung

Category

1. Astronomie

Tags

1. Sternenentwicklung
2. Sternentwicklung