Mathematik: Koordinatensysteme

Description

Gehört zu: [Tensoren](#)

Siehe auch: [Metrik-Tensor](#), [Astronomische Koordinatensysteme](#), [Raumkrümmung](#)

Benutzt: [Latex-Plugin](#)

Stand: 23.10.2024

Medien-Hinweise

Prof. Wagner: <https://youtu.be/c07r4pARzHw>

Koordinatensysteme

In der Geometrie führt man gerne Koordinatensysteme ein, um die geometrischen Objekte (Punkte, Linien, Geraden, Flächen, ...) mithilfe von Zahlen (Koordinaten) zu beschreiben und zu untersuchen. Das führt zur sog. Analytischen Geometrie.

Man spricht gerne von der Euklidischen Geometrie, dem Euklidischen Raum und den Euklidischen Koordinaten.

Kartesische Koordinaten

Nach **Rene Decartes (1596-1650)** nennt man die Euklidischen Koordinaten auch "Kartesische Koordinaten".

Im herkömmlichen unserer Anschauung entsprechenden dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ haben wir ja die klassischen Kartesischen Koordinaten mit den Symbolen: x, y, z . Im n -dimensionalen Falle schreibt man dann eher $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$

Koordinatensysteme und Mannigfaltigkeiten

Man hat eine Menge M (Punktmenge) und ordnet jedem Element (Punkt) aus M ein-ein-deutig ein n -Tupel von Koordinaten zu. Dann kann man statt der Punkte über diese n -Tupel (also die n Koordinaten) sprechen.

So eine Koordinate ist im einfachsten Fall eine reelle Zahl, dann sind die Koordinaten also n -Tupel reeller Zahlen, also Elemente aus dem $\mathbb{R}^n$. Im allgemeinen Fall nehmen wir für die Koordinaten einen Körper.

Wir hätten also eine ein-ein-deutige (d.h. bijektive) Abbildung zwischen Punkten aus M und n -Tupeln:

$(M \text{ to } \mathbb{R}^n)$

So eine Menge zusammen mit einem Koordinatensystem nennen wir (nach **Bernhard Riemann** 1816-1866) eine **Mannigfaltigkeit**.

In der Mathematik werden Mannigfaltigkeiten für sich noch sehr detailliert in genauer als hier behandelt. Für uns ist es wichtig zu einem Koordinatensystem zu kommen.

Kartesische Koordinaten

Im herkömmlichen unserer Anschauung entsprechenden dreidimensionalen Raum $(\mathbb{R}^3)$ haben wir ja die klassischen Kartesischen Koordinaten mit den Symbolen: x, y, z . Im n -dimensionalen Falle schreibt man dann eher $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$

Krummlinige Koordinaten

Bei nicht-kartesischen Koordinaten, die wir als "allgemeine Koordinaten" bezeichnen, verwenden wir im allgemeinen die Symbole q_i ($i=1,2,\dots$). Diese "allgemeinen Koordinaten" nennt man, um den Gegensatz zu den Kartesischen Koordinaten deutlich zu machen, auch gerne **krummlinige Koordinaten**.

Typische Beispiele für krummlinige Koordinaten sind z.B.

- Ebene Polarkoordinaten
- Kugel-Koordinaten
- Zylinder-Koordinaten

Krummlinige Koordinaten gibt es auch in einem "flachen" Raum; z.B. ebene Polarkoordinaten. Kartesische Koordinaten im "gekrümmten" Raum sind (global) nicht möglich (Raumkrümmung -> [Krümmungstensor](#)).

Kurven und Tangenten

Eine **Kurve** in einer Mannigfaltigkeit M wird gegeben durch eine **Abbildung** von einem reellen Intervall auf Punkte in die Mannigfaltigkeit. Man nennt so eine Abbildung auch eine Parameterdarstellung der Kurve.

Den Parameter aus einem reellen Intervall können wir schreiben als: $(t \in [t_a, t_e])$

Die Abbildung ist dann:

$([t_a, t_e] \text{ to } M)$

Wir haben also zu jedem Parameterwert $(t \in [t_a, t_e])$ einen Punkt aus der Mannigfaltigkeit M .

Wenn wir den Punkt durch seine Koordinaten $(\text{left}(q^i\text{right)})$ ausdrücken, ist die **Kurve** also eine Abbildung:

$([t_a, t_e] \text{ to } \mathbb{R}^n)$

Wo also die Koordinaten q^i eine Funktion des Parameters t sind: $(q^i = q^i(t))$

Wenn die Kurve **differenzierbar** ist (also die Koordinaten der Parameterdarstellung), hat die Kurve auch **Tangentenvektoren**:

$$\vec{T}(t) = \left(T^i(t) \right) = \left(\frac{dq^i}{dt} \right)$$

Die Kurve selbst liegt in der Mannigfaltigkeit; der Tangentenvektor aber nicht, er ist an die Mannigfaltigkeit sozusagen "angeheftet".

Die Tangentenvektoren liegen in einem eigenen **Vektorraum**!

Koordinatenlinien

Ganz einfache Formen einer Kurve sind die sog. **Koordinatenlinien**.

Bei einem n -dimensionalen Koordinatensystem erhält man eine **Koordinatenlinie** indem man $n-1$ Koordinaten festhält und genau eine Koordinate als Parameter laufen lässt. So eine Koordinatenlinie kann man als (unendliche) Kurve auffassen.

Durch jeden Raumpunkt $(p^i) = (p^1, p^2, \dots, p^n)$ gehen dann n Koordinatenlinien: (L_j) mit $(j=1, 2, \dots, n)$.

Die Koordinatenlinie (L_j) hat den Parameter $(t = q^j)$ und die Werte:

$$(q^i(t) = p^i \text{ falls } i \neq j) \\
(q^i(t) = t \text{ falls } i = j)$$

Schöneres Latex:

$$(q^i(t) = \left(\begin{array}{l} p^i & \text{falls } i \neq j \\ t & \text{falls } i = j \end{array} \right))$$

Koordinaten-Hyperflächen

Bei einem n -dimensionalen Koordinatensystem bekommt man **Koordinaten-Hyperflächen** in dem man genau eine Koordinate festhält und alle anderen laufen lässt.

Durch jeden Raumpunkt $(p^i) = (p^1, p^2, \dots, p^n)$ gehen dann n Koordinaten-Hyperflächen.

So eine Koordinaten-Hyperfläche kann man als sog. Teil-Mannigfaltigkeit auffassen.

Vektorbasis zu einem Koordinatensystem

Nun kann man an jedem Raumpunkt anhand des Koordinatensystems eine Vektorbasis definieren!

In jedem Raumpunkt kann man nun Basisvektoren so definieren, dass deren Länge 1 sei und sie Tangenten an die Koordinatenlinien durch diesen Punkt sind.

Astronomische Koodinatensysteme

Hierzu habe ich einen eigenen Artikel [Astronomische Koordinatensysteme](#) geschrieben.

CATEGORY

1. Mathematik

POST TAG

1. Koordinaten
2. Riemann

Category

1. Mathematik

Tags

1. Koordinaten
2. Riemann