Physik: Die Wellenfunktion in der Quantenmechanik

Description

GehÃ¶rt zu: Quantenphysik
Siehe auch: SchrÃ¶dinger-Gleichung, Materiewellen, Komplexe Zahlen, Lineare Algebra, Bra-Ket-Notation

Stand: 15.06.2025 (Klassische Welle, Observable, ZeitabhÃ¤ngigkeit, Korrespondenzprinzip)

Warnung / Disclaimer

Diesen Blog-Artikel schreibe ich ausschlieÃ?lich zu meiner persÃ¶nlichen Dokumentation; quasi als mein elektronisches persÃ¶nliches Notizbuch. Wenn es Andere nÃ¼tzlich finden, freue ich mich, Ã¼bernehme aber kleinerlei Garantie fÃ¼r die Richtigkeit bzw. die Fehlerfreiheit meiner Notizen. Insbesondere weise ich darauf hin, dass jeder, der diese meine Notizen benutzt, das auf eigene Gefahr tut.
Wenn Podukteigenschaften beschrieben werden, sind dies ausschlieÃ?lich meine persÃ¶nlichen Erfahrungen als Laie mit dem einen GerÃ¤t, welches ich bekommen habe.

YouTube-Video: https://youtu.be/-KSeRfep3Ek?si=4FkHAWmKw3sJ3RQy

Spektrum des Wasserstoffatoms

Ein groÃ?es Problem der â??Atomtheorieâ?• vor 1925 war das Spektrum des Wasserstoffatoms. Mit dem Bohrschen Atommodell konnte man das nicht vollstÃ¤ndig berechnen. Kann man wirklich von Elektronenbahnen im Wasserstoffatom sprechen? Beobachtbar (Umlaufszeit, Radius) waren die Elektronenbahnen nicht.

Werner Heisenberg versuchte deshalb eine Theorie zu entwickeln, in der ausschlieÃ?lich beobachtbare GrÃ¶Ã?en vorkommen. Das sollte man spÃ¤ter â??Observablenâ?• nennen. Bei den Spektrallinien waren beobachtbar: die Frequenz und die IntensitÃ¤t.

Die â??klassischeâ?• Welle

Die klassische Wasserwelle ist ein periodisches Auf und Ab des Wasserstands, abhÃ¤ngig von der Zeit t und dem Ort x.

Zu einem festen Zeitpunkt hÃ¤ngt die Auslenkung y nur noch vom Ort x ab und kann man schreiben:

\(\Large y(x) = A \cdot \sin(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x) \\ \)
Dabei ist A die **Amplitude** und Î» die **WellenlÃ¤nge**.

Als AbkÃ¼rzung benutzt man die sog. **Wellenzahl** \(\Large k = \frac{2 \pi}{\lambda} \) und kann damit schreiben:

\(\Large y(x) = A \cdot \sin(k \cdot x) \\ \)
An einem festen Ort hÃ¤ngt die Auslenkung y nur noch von der Zeit t ab und man kann schreiben:

\(\Large y(t) = A \cdot \sin(\frac{2\pi}{T} \cdot t) \\ \)
Dabei ist A die **Amplitude** und T die **Periodendauer**.

Als AbkÃ¼rzung benutzt man die sog. **Kreisfrequenz** \(\Large \omega = \frac{2 \pi}{T} \) und kann damit schreiben:

\(\Large y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ \)
Wenn man die Auslenkung der Welle zu jedem Zeitpunkt t und an jedem Ort x haben will, bekommt man:

\(\Large y(x,t) = A \cdot \sin{(k \cdot x â?? \omega \cdot t)} \\\)
Link: https://youtu.be/MzRCDLre1b4

Komplexe Zahlen

SchrÃ¶dinger wie auch Heisenberg kamen schnell zu der Erkenntnis, dass man allein mit reelen Zahlen nicht weiter kommt und zu den komplexen Zahlen Ã¼bergehen muss.

Wenn wir eine komplexe Zahl in Polarkoordinaten (r und Ï?) schreiben, sieht das so aus:

\(\Large z = r \cdot e^{i \phi} \\\)
Mit Komplexen Zahlen bedeutet eine periodische Schwingung eine gleichfÃ¶rmige Kreisbewegung in der komplexen Zahlenebene. In Polarkoordinaten geschrieben, erhalten wir so die einfachste Form einer Wellenfunktion:

\(\Large \Psi(x,t) = A \cdot e^{i \, (k\cdot x â?? \omega \cdot t)} \)

Die Wellenfunktionen in der Quantenphysik

Youtube: https://youtu.be/YJjHI7Gxn-s?si=iYv8Kg0MbKDfWvr7

In der klassischen Mechanik (Newton etc.), wird ein Teilchen durch Ort x(t) und Implus p(t) beschrieben mit seinem sog. â??Zustandâ?•. Wenn man den Zustand zu einem Zeitpunkt t=0 kennt, also x(0) und p(0), dann kann man alle zukÃ¼ftigen ZustÃ¤nde berechnen durch Newtons berÃ¼hmte Gleichung:

\(F = \, â?? m \ddot x \) d.h. \(F = \, â?? \dot p \)

In der Quantenphysik macht man das mit der Wellenfunktion Î¨. Sehr allgemein gesagt: Eine Wellenfunktion beschreibt den Zustand eines quantenmechanischen Teilchens.

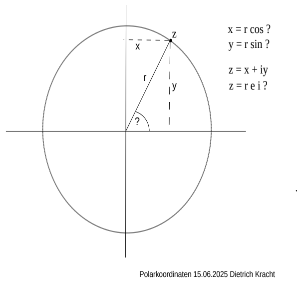
Der **Wertebereich** einer Wellenfunktion sind die Komplexen Zahlen. Der **Definitionsbereich** sind Ort und Zeit Î¨(r,t).

Der Wert ist also eine Komplexe Zahl, veranschaulicht in **Polar-Koordinaten** durch einen Vektor mit einer LÃ¤nge, auch **â??Amplitudeâ?•** genannt, und einem Winkel, auch **Phase** genannt.

FÃ¼r die Darstellung Komplexer Zahlen in Polar-Koordinaten benutzt die Quantenmechanik gerne die sog. Exponential-Darstellung:

\(\Large z ={r} \cdot e^{i \cdot \phi} \\\)Damit kann man sich die Komplexe Zahl gut als Vektor einer bestimmten LÃ¤nge r (auch genannt **Amplitude**) mit einem Drehwinkel Î¦ (auch genannt **Phase**) vorstellen.

Abbildung 1: Polarkoordinaten (GitHub: Polarkoordinaten.svg)



Da der Wert der Wellenfunktion eine Komplexe Zahl ist, kann man sie nicht â??direktâ?• beobachten; der Betrag der Wellenfunktion zum Quadrat ist aber eine nicht negative reelle Zahl und ist so der Beobachtung zugÃ¤nglich.

Wir werden spÃ¤ter sehen, dass man mit der Wellenfunktion die Wahrscheinlichkeit fÃ¼r den Aufenthalt eines Teilchens an einem bestimmten Ort (Aufenthaltswahrscheinlichkeit) und auch die

Wahrscheinlichkeiten anderer GrÃ¶Ã?en, sog. **Observable** berechnen (vorhersagen) kann. Daher auch der Spruch *â??Shut up and calculateâ?•*, der angeblich auf **Richard Feynman (1918-1988)** zurÃ¼ckgehen sollâ?¦

Woher bekommen wir die Wellenfunktion eines quantenmechanischen Systems? Die Wellenfunktion bekommen wir als LÃ¶sung der SchrÃ¶dinger-Gleichung.

Die Kopenhagener Deutung der Wellenfunktion

Dazu habe ich einen eigenen Blog-Artikel geschieben: Kopenhagener Deutung.

Operatoren und Observable

Was ist ein Operator?

Ein Operator bildet einfach eine Funktion auf eine andere Funktion ab. Traditionell spricht man dann nicht so allgemein von einer â??Abbildungâ?•, sondern von einem â??Operatorâ?•. Folgendes Beispiel fÃ¼r Operatoren habe ich aus einem Youtube-Video von Prof. Patrick NÃ¼rnberger entnommen:

Um zu zeigen, was ein Operator macht, nehmen wir fÃ¼r ein Beispiel als Funktion einfach einmal $\Psi(x) = e^{-x^2}$ und als Operator nehmen wir, ebenfalls als Beispiel, die zweite Ableitung der Funktion nach x und schreiben diesen Operator als $\Large \hat A = \frac{d^2}{dx^2}$.

Dann ist dieser Operator angewendet auf unsere Funktion (nach der Kettenregel):

$\hat A \Psi = \frac{d^2}{dx^2} \, e^{-x^2} = \frac{d}{dx}(-2x \, e^{-x^2}) \\$
Die Produktregel ergibt dann:

$\hat A \Psi = -2 \cdot e^{-x^2} + (-2x) \cdot (-2x \, e^{-x^2}) = (4x^2 â?? 2) e^{-x^2}$

Was sind Observable?

Im Experiment beobachtbare GrÃ¶Ã?en eines physikalischen Systems, also MessgrÃ¶Ã?en.

Observable sind z.B.:

- Ort
- Impuls
- Kinetische Engergie
- etc.

Operatoren in der Quantenmechanik

Wahrscheinlichkeitsdichte

Den Zustand eines quantenphysikalischen Systems beschreiben wir durch die Wellenfunktion Î¨ dieses Systems. Die kÃ¶nnen wir aber nicht direkt beobachten. Um zu beobachtbaren GrÃ¶Ã?en zu kommen, benutzen wir die oben eingefÃ¼hrten Operatoren, die auf die Wellenfunktion angewendet werden und dann beobachtbare Werte (â??Observableâ?•) liefern; aber auch nur als Wahrscheinlichtkeitsverteilung (woraus ich Erwartungswerte etc. berechnen kann).

In Analogie zur **Kopenhagener Deutung** schreiben wir fÃ¼r eine beliebige Observable Q die Wahrscheinlichkeitsdichte als:

\(\Large \rho(Q) = \Psi^* \hat Q \Psi \\\)
Der zur **Observablen** \(Q \) zugeordnete **Operator** \(\hat Q \) liefert dann zusammen mit der Wellenfunktion des quantenphysikalischen Systems die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Observablen (in reelen Zahlen).

In Analogie zur **Kopenhagener Deutung** schreiben wir fÃ¼r eine beliebige Observable Q den Erwartungswert als:

\(\Large \langle \hat{Q} \rangle= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \hat{Q} \Psi dx \)
Das Korrespondenzprinzip

Der Begriff â??Korrespondeszprinzipâ?• hat je nach Kontext, verschiedene Bedeutungen. In der Quantenmechanik hat ihn z.B. Niels Bohr bei seinem Atommodell eingefÃ¼hrt. In der Wellenmechanik versucht das Korrespondenzprinzip eine Korrespondenz zwischen klassischen MessgrÃ¶Ã?en und Operatoren herzustellen.

Welcher Operator wird in der Quantenmechanik fÃ¼r welche Observable genommen? Dazu haben wir zwei Beispiele:

Beispiel 1: Die Observable â??Ortâ?• (eindimensional):

Operator: \(\Large\hat{x} \Psi(x,t) = x \cdot \Psi(x,t) \normalsize \text{ also Multiplikation}\)

Beispiel 2: Die Observable â??Impulsâ?• (eindimensional):

Operator: \(\Large\hat{p} \Psi(x,t) = -i \hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} \normalsize \text{ also Ableitung} \)

Weitere Zuordnungen von Operatoren zu Observablen konstruieren wir daraus. Das nennt man **Korrespondenzprinzip**.

Fragen wir beispielweise nach dem Operator fÃ¼r die Observable eindimensionale â??kinetische Energieâ?•, so beginnen wir mit der klassischen Formel:

\(\Large E_{kin} = \frac{p^2}{2m} \\\)
und ersetzen dann die klassiche GrÃ¶Ã?e Impuls p durch den obenstehenden Impuls-Operator:

\(\Large \hat{E}_{kin} = \frac{{\hat p}^2}{2m} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}\\\)

Allgemein besagt das Korrespondenzprinzip, dass wir aus einer klassischen MessgrÃ¶Ã?e, die vom Ort und vom Impuls abhÃ¤ngt, also $f(x,p)$, in der Quantenmechanik einen â??korrespondierendenâ?• Operator bekommen: $\hat{f}(\hat x, \hat p)$

CATEGORY

1. Physik

POST TAG

1. Quantenphysik

Category

1. Physik

Tags

1. Quantenphysik